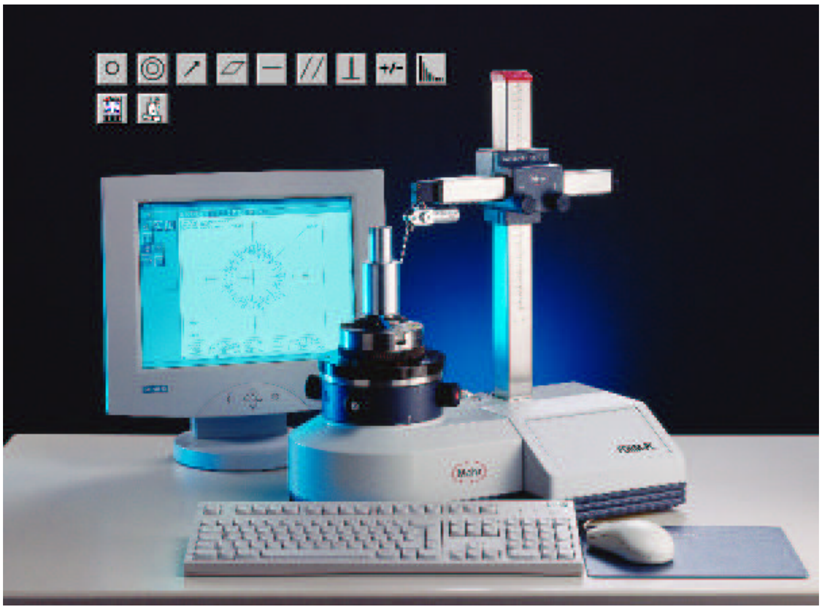
Bahnberechnung und Steuerung in der Messtechnik



Henning Thielemann
Zentrum für Technomathematik
Universität Bremen

30. September 2002

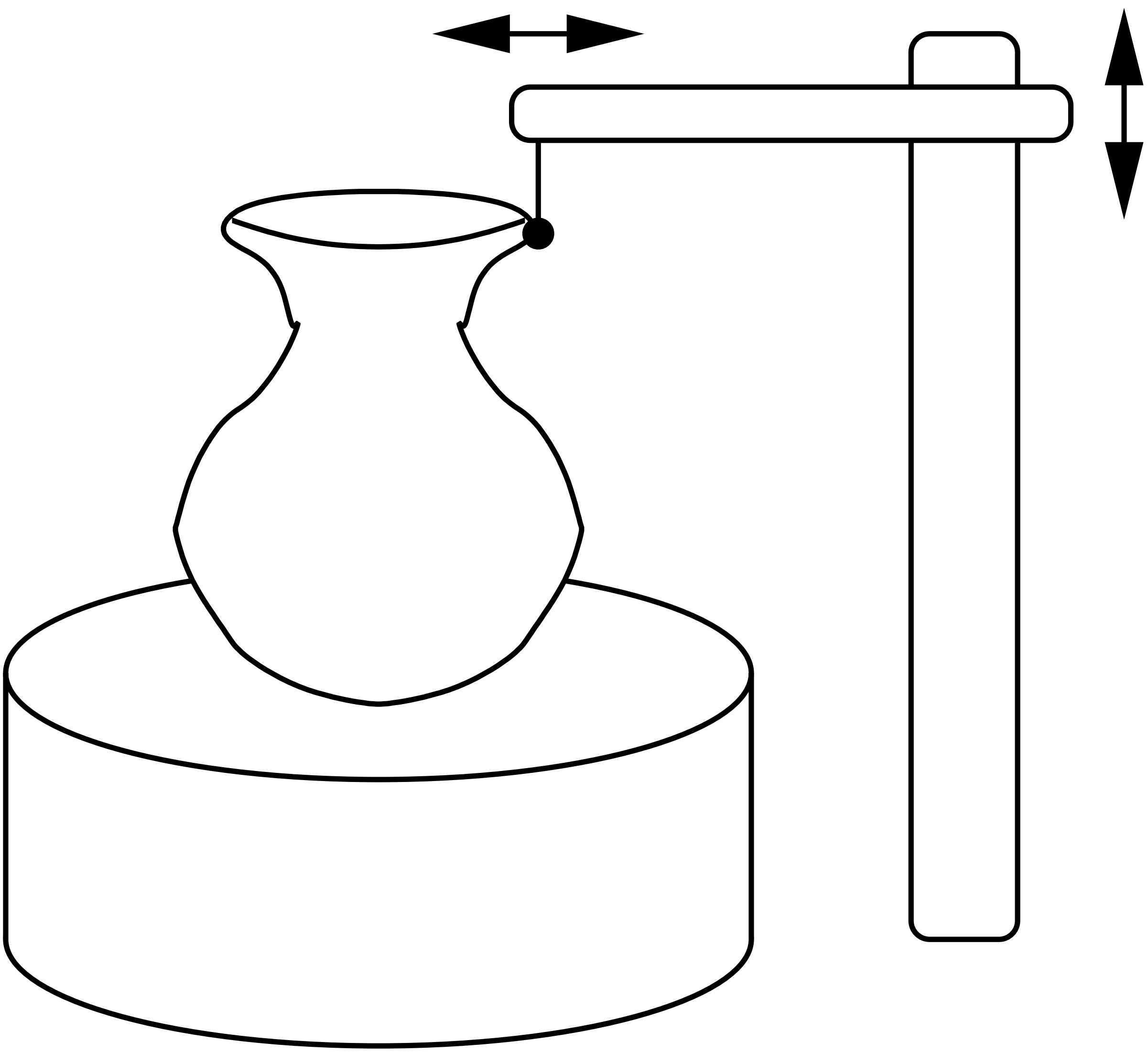
Überblick

- Problem
- Optimale Steuerung
- Splines

Ein Industrieprojekt in Zusammenarbeit der Firma Mahr

- Kai Kammers
- Fabian Wirth
- Marco Ende
- Peter Maaß

Messaufbau



Messung im Mikrometer-Bereich

Vorläufige mathematische Formulierung

Gegeben: $N+1$ Stützstellen P_i im dreidimensionalen Raum

$$(P_i : i \in \{0, 1, \ldots, N\}) \in \mathbb{R}^{3,N+1}$$

Gesucht: Eine Funktion φ die diese Stützstellen durchläuft und in gewisser Weise „schön“ aussieht

- Definitions- und Wertebereich

  $$\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}^3$$

  T unbekannt

- Interpolation

  $$\forall i : \varphi(t_i) = P_i$$

  t_i ebenfalls unbekannt

- Abweichung von Sollkurve
  φ soll von Polygonzug höchstens um δ abweichen.

- Sollgeschwindigkeit
  Die Kurve soll möglichst gleichmäßig mit der Geschwindigkeit v_{soll} abgefahren werden.

$$\forall t : |\dot{\varphi}(t)| \approx v_{\mathsf{soll}}$$

- Maximalbeschleunigung
  Für jede Achse gibt es unabhängige höchste zugelassene Beschleunigung.

$$\forall t : |\ddot{\varphi}_{\mathsf{x,max}}(t)| \leq a_{\mathsf{x,max}}$$
$$\forall t : |\ddot{\varphi}_{\mathsf{y,max}}(t)| \leq a_{\mathsf{y,max}}$$
$$\forall t : |\ddot{\varphi}_{\mathsf{z,max}}(t)| \leq a_{\mathsf{z,max}}$$

- Ruckfreiheit
  φ soll sehr glatt sein, genauer: die Beschleunigungsfunktion $\ddot{\varphi}$ soll noch stetig differenzierbar sein, d.h. φ soll eine stetige dritte Ableitung besitzen

- Anfangs- und Endbedingung
  Messkopf soll aus der Ruhelage ohne Geschwindigkeit und Beschleunigung sanft starten und am Ende ebenso stoppen.

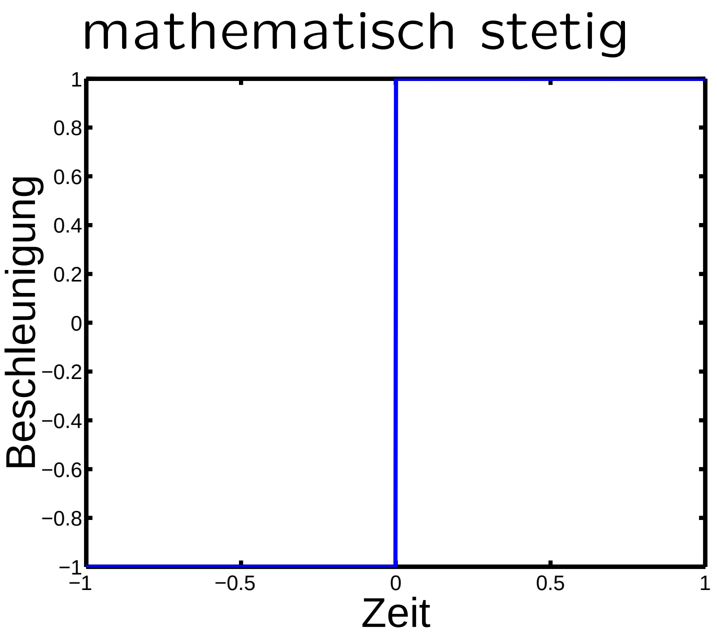
$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(0) &= 0 \qquad & \dot{\varphi}(T) &= 0 \\ \ddot{\varphi}(0) &= 0 \qquad & \ddot{\varphi}(T) &= 0 \end{aligned}$$

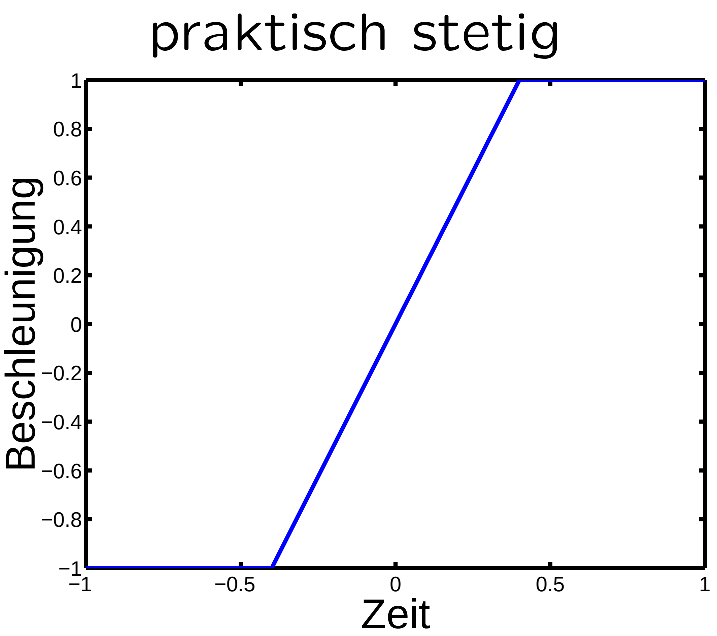
Was ist überhaupt das Optimierungsziel?

- Möglichst wenig Zeit T ?
- Möglichst hohe Geschwindigkeit $\dot{\varphi}$?
- Möglichst glatt ?
- Möglichst minimale Abweichung von Sollkurve ?

$\longrightarrow$ Problem mathematisch beschrieben - aber nicht genau genug.

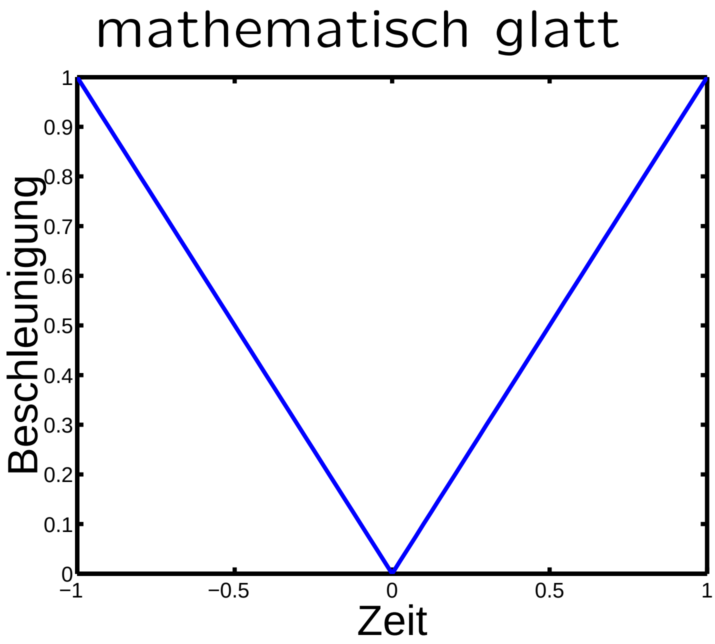
Verfeinerung der Formulierung
Stetigkeit der Beschleunigung

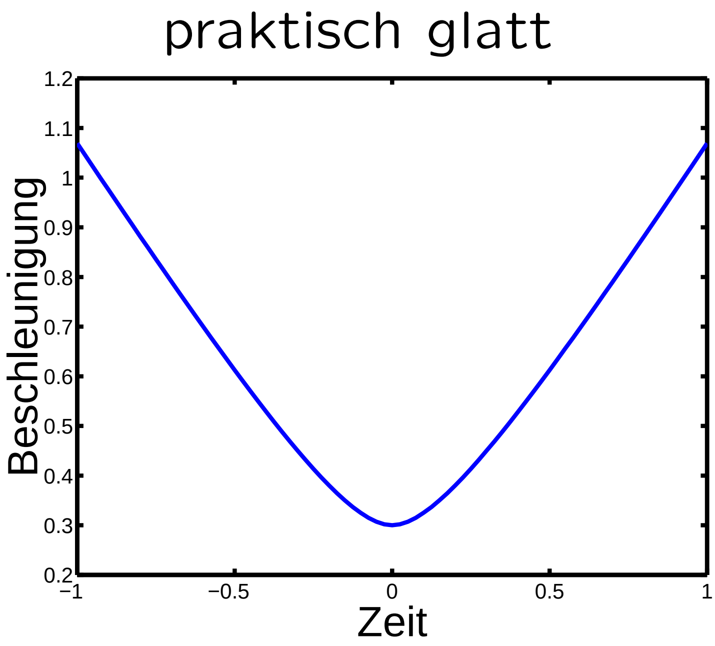




$\longrightarrow$ Beschränkung der Ableitung erforderlich

Glattheit der Beschleunigung

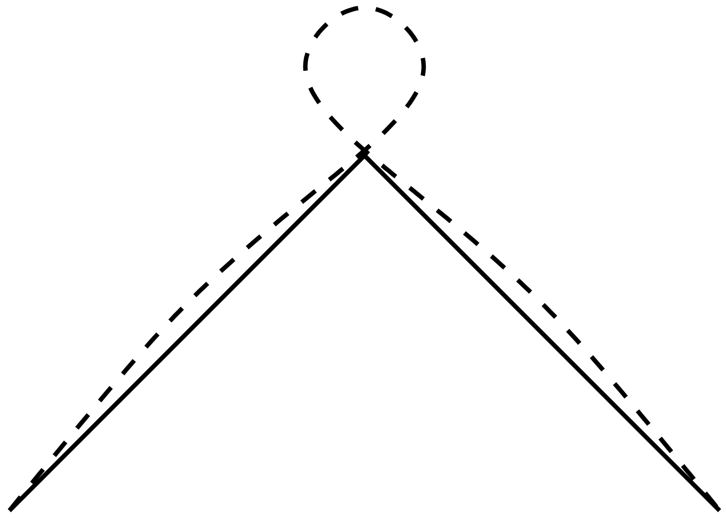




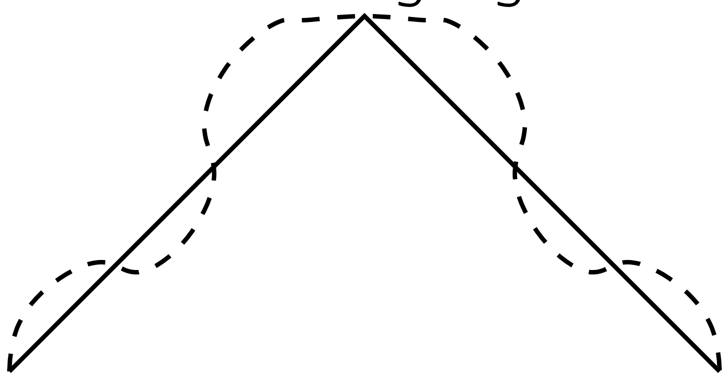
$\rightarrow$ Beschränkung der zweiten Ableitung erforderlich

Sind diese Kurven „schön“?

Schleife



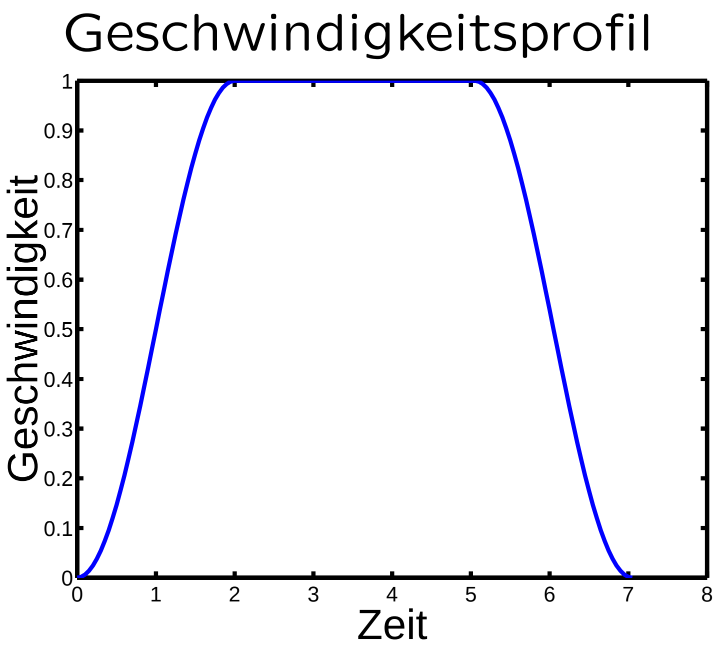
Schwingung



Kein Problem für maschinelle Auswertung, für manuelle Auswertung dagegen schon

Einfacher Fall

Geradlinige Bewegungen - Wunschprofil:



Neuer Algorithmus soll für geradlinige Bewegungen dieses Profil liefern.

Überarbeitete Problemformulierung

- Interpolationsbedingung bleibt
- Maximale Abweichung von Polygonzug auch
- Sollgeschwindigkeit = Maximalgeschwindigkeit
- Beschränkungen an die Komponenten von $\ddot{\varphi} = a, \dddot{\varphi} = \dot{a}, \ddddot{\varphi} = \ddot{a}$
- Optimierungsziel: Zeit

Problem klar - Lösung auch?

Mitnichten.

Große Schwierigkeiten:

- Vermengung von Beschränkungen der euklidischen Norm und Beschränkungen der Maximumnorm.

- Ungewöhnliche Form des δ-Schlauches um Polygonzug

1. Ansatz: Mathematik

Theorie der optimalen Steuerung: Versuche Beschränkungen auszureizen

Einfacher Fall: Geradlinige Bewegung

Steuere mit der höchsten Ableitung, für die wir Beschränkungen auferlegt haben. Hier: $\ddot{a}$. Gib $\ddot{a}$ vor und berechne

$$\dot{a} = \int \ddot{a}$$
$$a = \int \dot{a}$$
$$v = \int a$$
$$\varphi = \int v$$

Verwende für jede Komponente von $\ddot{a}$ nur maximal zulässige Werte oder 0, etwa:

$$\forall t : \ddot{a}_{\mathsf{x}}(t) \in \{-\ddot{a}_{\mathsf{max}}, 0, \ddot{a}_{\mathsf{max}}\}$$

Steuerprofil

- Steuere mit $\ddot{a} = \ddot{a}_{\text{max}}$ bis $\dot{a}_{\text{max}}$ erreicht ist

- Steuere mit $\ddot{a} = 0$, d.h. konstantem $\dot{a}$ bis a_{max} erreicht ist ...

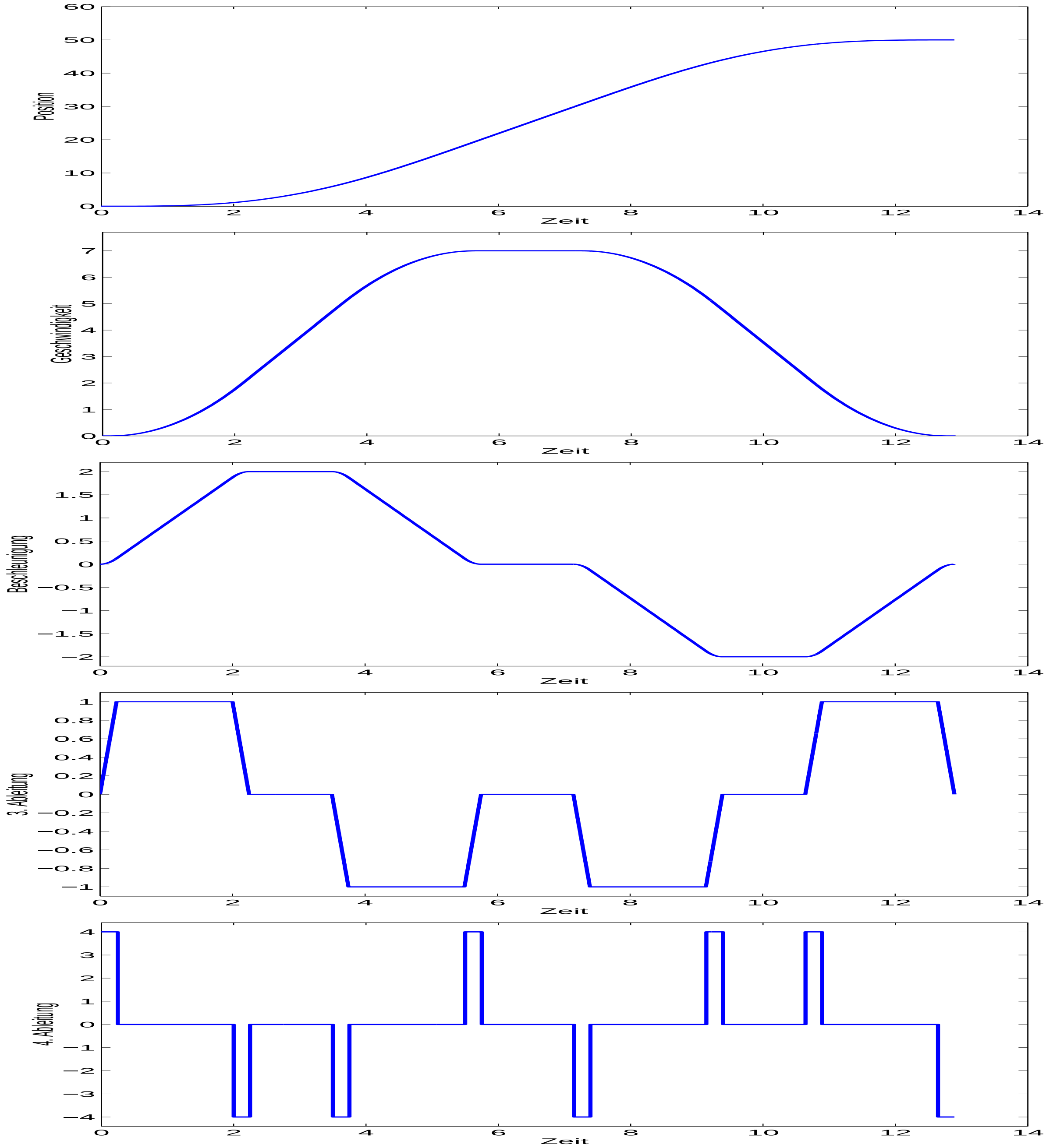
- ... da ist es aber schon zu spät, deshalb: steuere rechtzeitig mit $\ddot{a} = -\ddot{a}_{\text{max}}$, so dass $a = a_{\text{max}}$ zusammen mit $\dot{a} = 0$ erreicht wird

- wiederhole beide Steuerimpulse, um zur maximalen Geschwindigkeit zu gelangen

- wiederhole resultierende vier Steuerimpulse um am Ende am Zielpunkt in Ruhelage anzukommen

- nicht immer so geordnet: während des Zusteuerns auf $a = a_{\text{max}}$ möglicherweise $v \leq v_{\text{max}}$ bereits verletzt

Beispiel

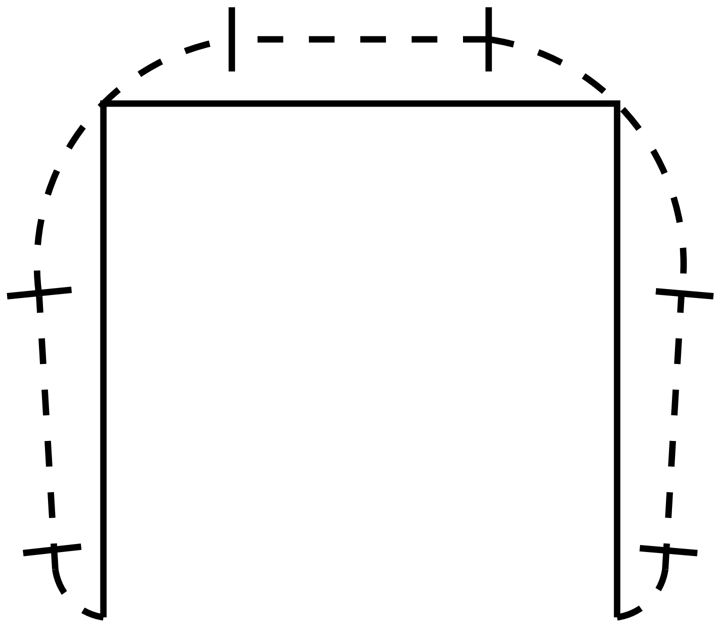


Position
Zeit
Geschwindigkeit
Zeit
Beschleunigung
Zeit
3. Ableitung
Zeit
4. Ableitung
Zeit

Erweiterung auf gesamte Kurve

Zunächst: Kurve in Ebene $\mathbb{R}^2$

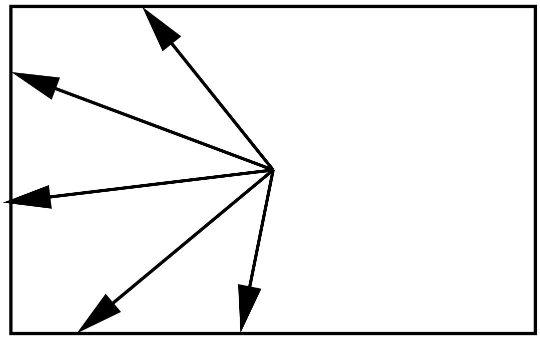
Setze gesamte Kurve aus Bögen um die Stützstellen und geraden Verbindungsstücken zusammen.

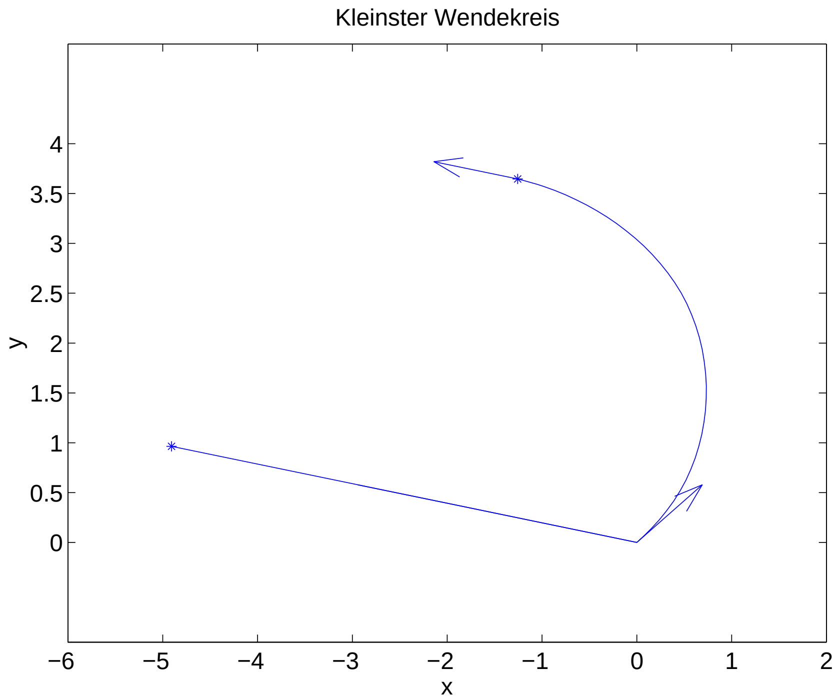


Bogenstücke

Ansatz: Durchfahre Bogen mit konstanter Geschwindigkeit und maximaler Krümmung bzgl. Beschleunigungsbeschränkung.

Beschränkung der Maximumnorm der Beschleunigung





Durchfahren der Stützstellen

Der Ansatz führt für jede Komponentenbeschränkung auf eine Differentialgleichung für den Beschleunigungswinkel β.

$$\dot{\beta} = \pm \frac{a_{\mathrm{y,max}}}{v\,|\cos\beta|}$$

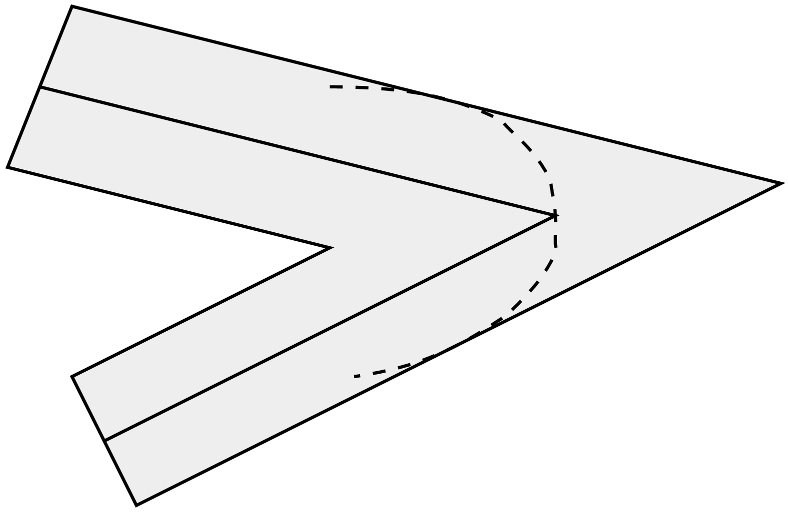
$$\dot{\beta} = \pm \frac{a_{\mathrm{x,max}}}{v\,|\sin\beta|}$$

Diese Gleichungen lassen sich geschlossen integrieren

$$\beta(t) = \arcsin\left(\pm \frac{a_{\mathrm{y,max}}}{v} \cdot t + \sin\beta(0)\right)$$

$$\beta(t) = \arccos\left(\mp \frac{a_{\mathrm{x,max}}}{v} \cdot t + \cos\beta(0)\right)$$

Erfüllen der Vorgaben



Der Bogen lässt sich immer genau einpassen.

Es ergibt sich folgendes Vorgehen:

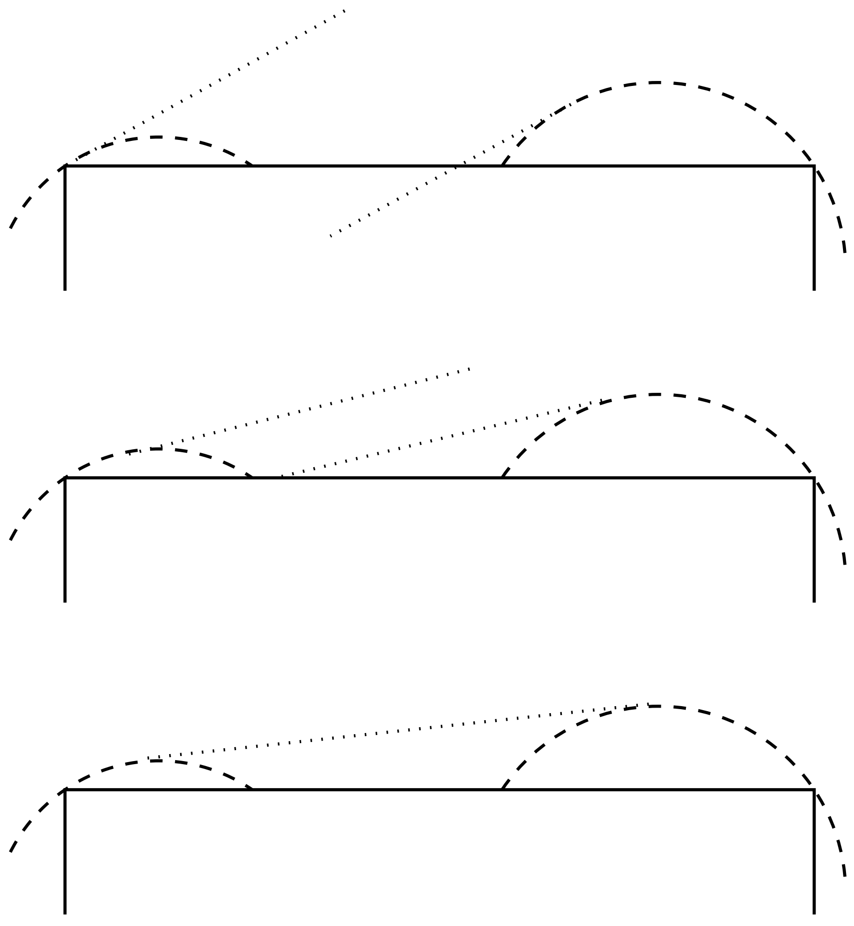
- Bestimme für jeden Stützpunkt einen Wendekreis der genau passt

- Jeder Bogen wird mit einer anderen Geschwindigkeit durchfahren

- Verbinde die Bögen durch gerade Strecken und gleiche auf diesen Strecken die Geschwindigkeit an

Verbinden der Bögen

Finde die Stellen auf den Bögen, wo man auf die gerade Strecken übergehen sollte. Suche Tangente des einen Bogens, die gleichzeitig Tangente des anderen Bogens ist. Eine gemeinsame Tangente muss aus Stetigkeitsgründen existieren.



Offene Frage

Wie lässt sich das beschriebene Verfahren auf den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ übertragen? Die Kurve wird im allgemeinen um die Stützstellen herum nicht eben sein.

$\longrightarrow$ Lösung noch nicht komplett!

Was nun?

2. Ansatz: Basteln

Verwende stückweise polynomielle Kurve, d.h. für jedes Intervall zwischen den Stützstellen sind die Komponenten Polynome.

$$\forall i : \varphi_x|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \mathbb{R}[t]$$

Vorteile:

- Hoher Polynomgrad und Verknüpfung an Stützstellen sichert Glattheit
- Erzeugt „schöne“ Kurven
- Relativ einfache Implementation

Nachteile:

- Modell reizt keine Beschränkung aus, wird daher nie optimal sein
- Geschwindigkeit meist nicht konstant

Parameter des Spline-Modells

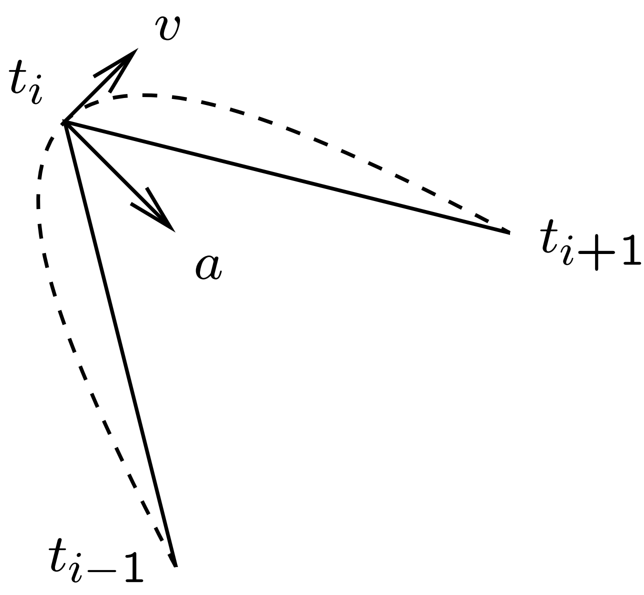
- Zeitspannen für jedes Intervall

$$\forall i : \Delta t_i = t_{i+1} - t_i$$

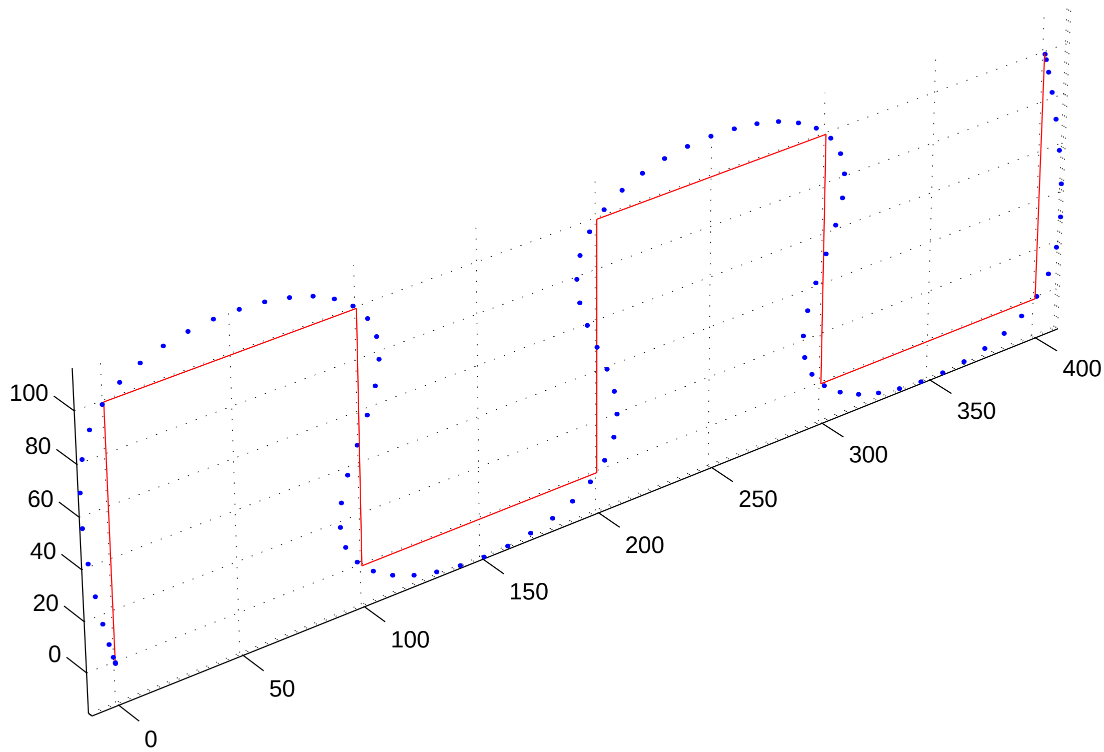
- Position, Geschwindigkeit, Beschleunigung an jeder Stützstelle

$$\varphi(t_i), v(t_i), a(t_i)$$

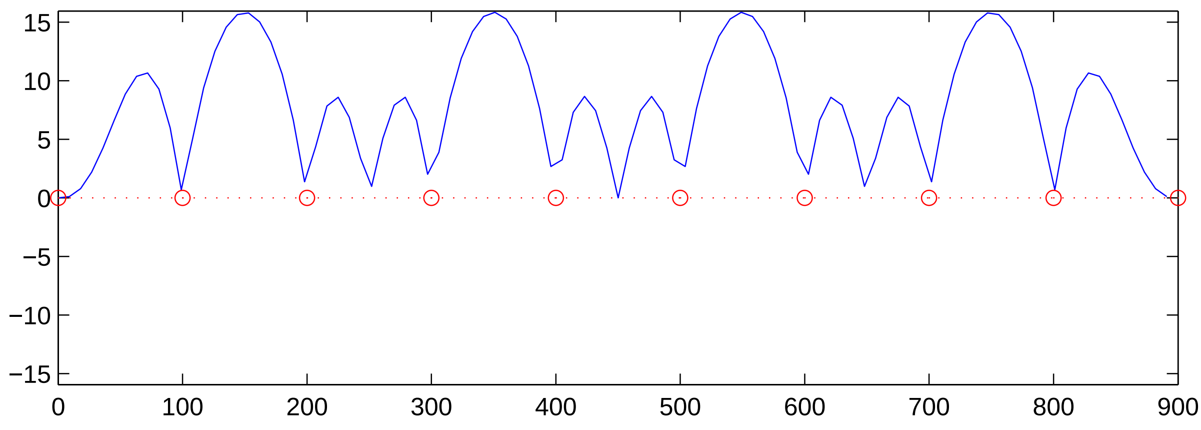
Einfache Heuristik: Lege Parabel durch drei benachbarte Stützpunkte $\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i), \varphi(t_{i+1})$ und übernimm die resultierenden Parameter für die mittlere Stützstelle t_i.

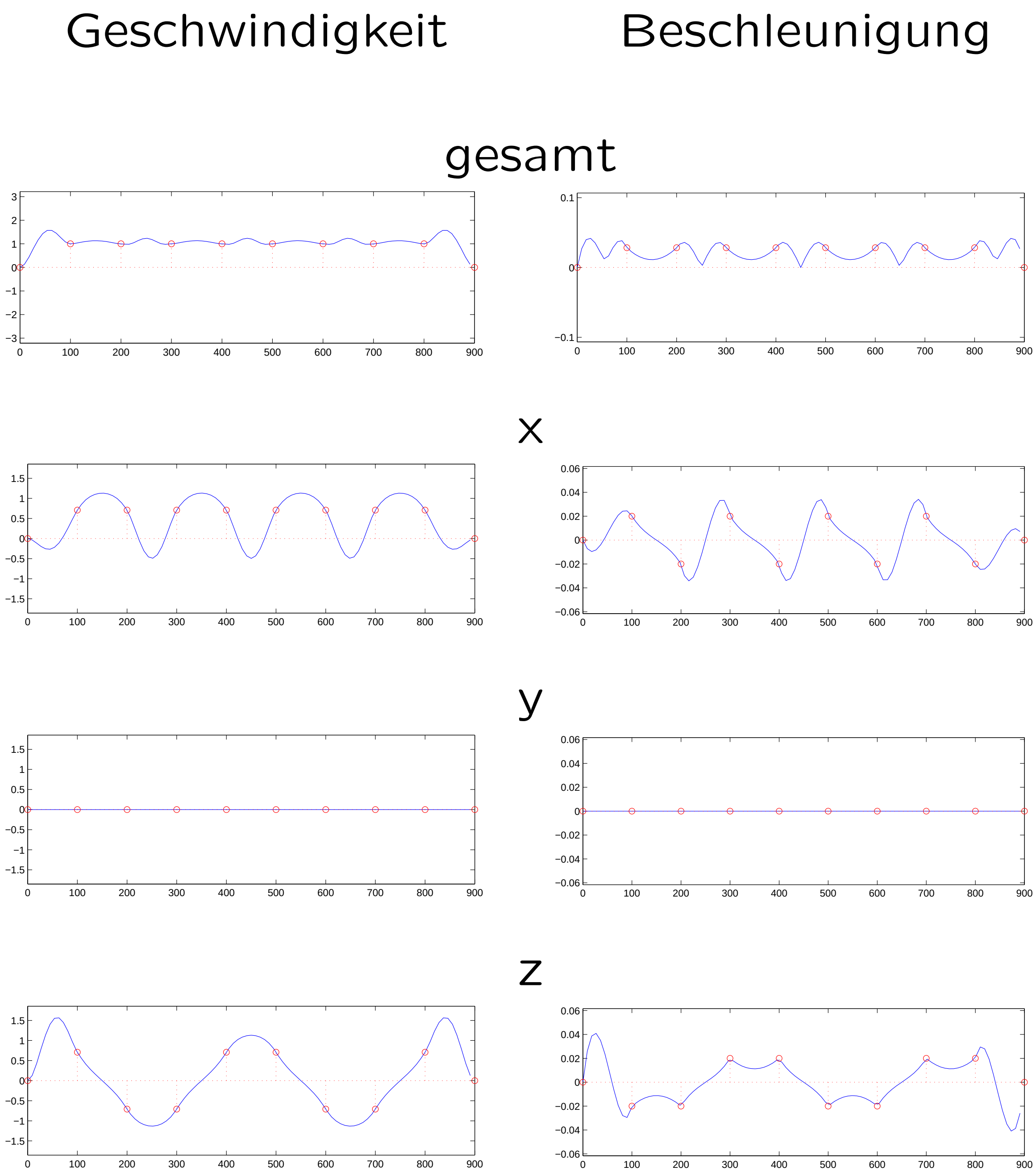


Beispiel



Abweichung von Sollkurve





Geschwindigkeit
Beschleunigung
gesamt
x
y
z

Berechnung kritischer Größen

Die gegebenen Beschränkungen werden möglicherweise von dieser ersten Lösung nicht eingehalten. Überprüfung:

- Beschleunigung und deren Ableitungen
  Ableitungen von Polynomen einfach

- Absolute Geschwindigkeit
  Geschwindigkeitskomponenten müssen quadriert und addiert werden

$$|v|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

- Abstand von Polygonzug

$$|d|^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 - (\varphi_x r_x + \varphi_y r_y + \varphi_z r_z)^2$$

Erhalten für jede Größe ein Polynom

Überprüfen der Nebenbedingungen

Exakte Bestimmung der Maxima dieser Größen in jedem Intervall aufwändig.

Einfacher: Zerlegung der Polynome in andere Polynome, gut geeignet: Tschebyschoff-Polynome T_n

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$$

Es sei p Polynom für eine Größe, dann gilt Abschätzung:

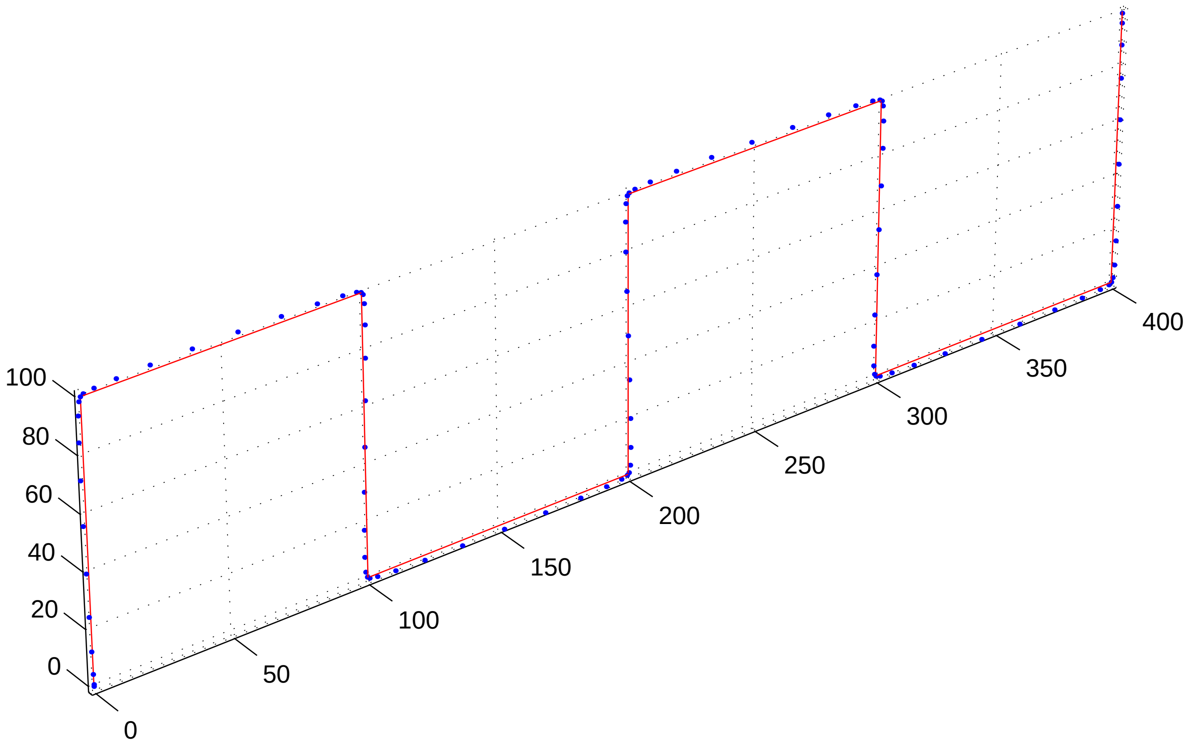
$$\begin{aligned} \|p\|_\infty &= \left\| \sum_j c_j T_j \right\|_\infty \\ &\leq \sum_j \left|c_j\right| \cdot \left\|T_j\right\|_\infty \qquad \Big| \quad \left\|T_j\right\|_\infty = 1 \\ &\leq \sum_j \left|c_j\right| \end{aligned}$$

Einhaltung der Toleranzen

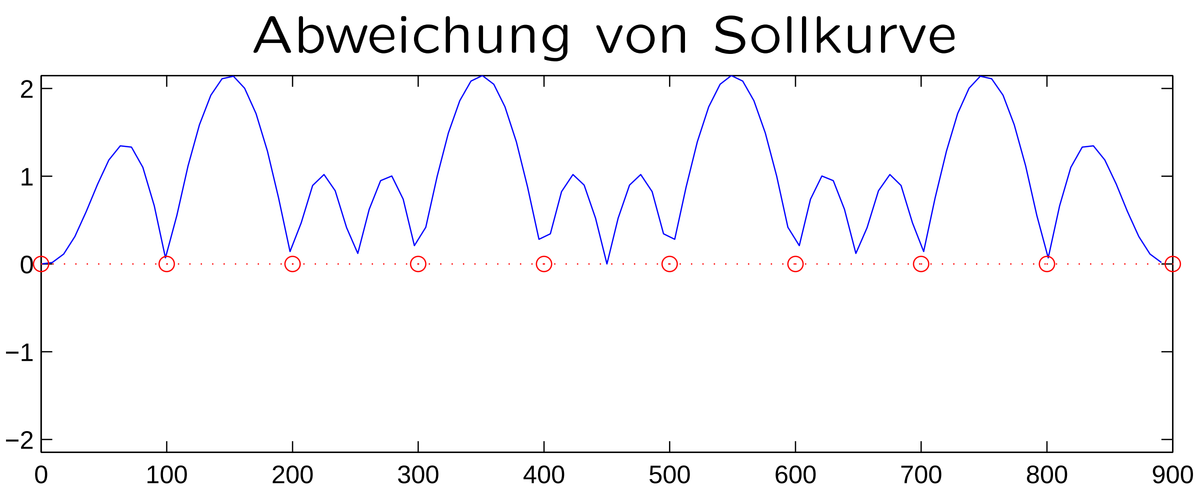
- Überschreitung Bahnabweichung
  $\rightarrow$ Verringere Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvorgaben an Stützstellen

- Zu große Geschwindigkeit oder Beschleunigung
  $\rightarrow$ Verringere Geschwindigkeit zum Durchfahren der Kurve

Beispiel



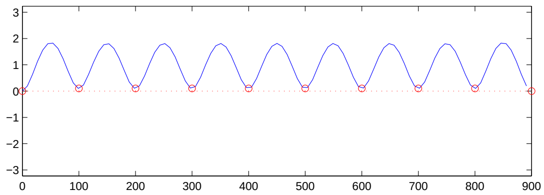
100
80
60
40
20
0
0
50
100
150
200
250
300
350
400

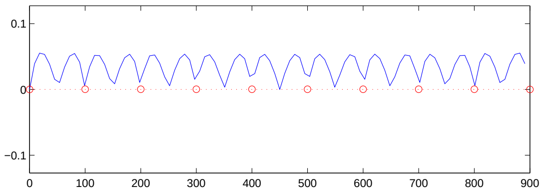


Abweichung von Sollkurve
2
1
0
−1
−2
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900

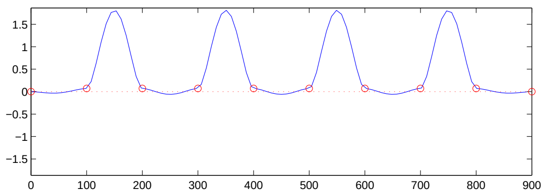
Geschwindigkeit Beschleunigung

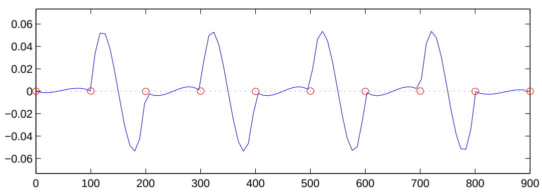
gesamt



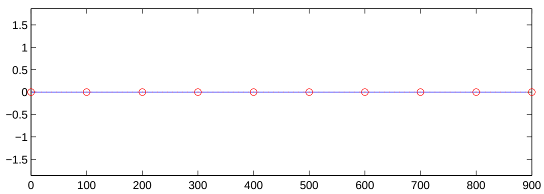


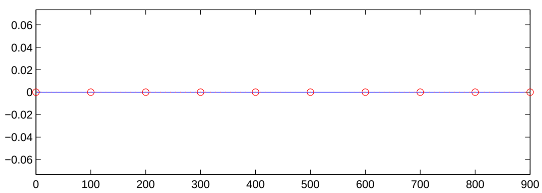
x



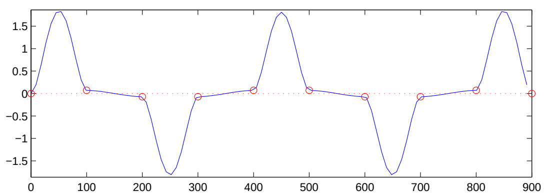


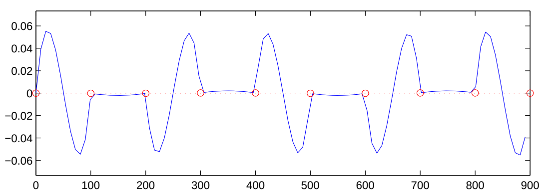
y





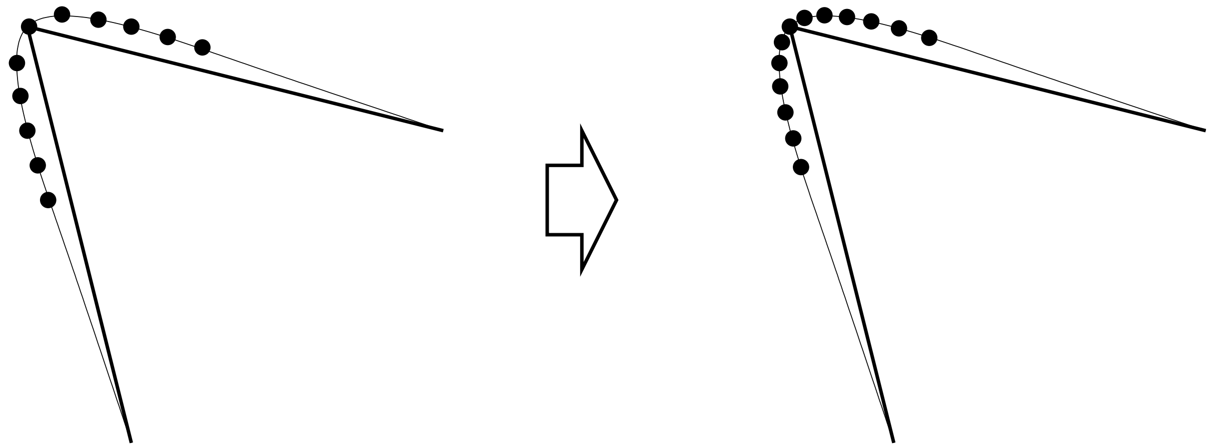
z





Beobachtung

Kurve wird sehr ungleichmäßig abgefahren. Versuche durch Umparametrisierung möglichst gleichmäßig mit Sollgeschwindigkeit zu fahren. Reduziere Geschwindigkeit überall dort, wo eine Beschränkung verletzt wird.



Ergebnis

- Keine geschlossene Theorie für das Problem bekannt

- Mathematisch exakter Ansatz führt weit, aber noch nicht bis zum Ende

- Splineansatz könnte Basislösung für praktischen Einsatz liefern

Mahrs Proben